

1. Beschouw het volgende niet-lineaire iteratieproces:

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

voor de familie van iteratiefuncties

$$f_\lambda(x) = x^4 + \lambda$$

met de parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ en met $x \in \mathbb{R}$.

- Schets de grafiek van $f_\lambda(x)$ voor de parameterwaarde $\lambda = -2$. Laat zien dat $x = -1$ een vast punt van de differentievergelijking is en ga hiervan de stabiliteit na.
- Het bijbehorende bifurcatiediagram (“orbit diagram”) is in Figuur 1a weergegeven voor $\lambda \in [-1.25, 0.0]$. De eerste bifurcatie (voor afnemende λ) vindt plaats bij $\lambda = -0.78$. Waardoor ontstaat deze?
- In Figuur 1b is het bifurcatiediagram uitvergroot voor het interval $\lambda \in [-1.25, -1.0]$. Hoe kun je hieraan zien dat er (waarschijnlijk) sprake is van chaos?

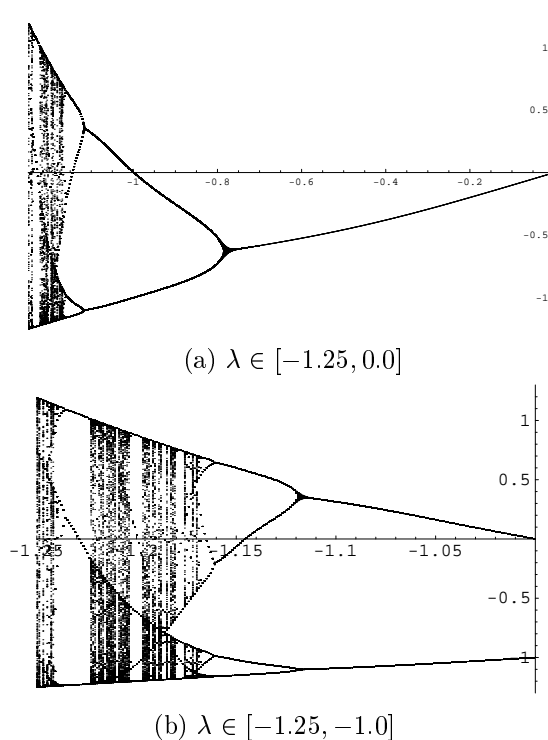
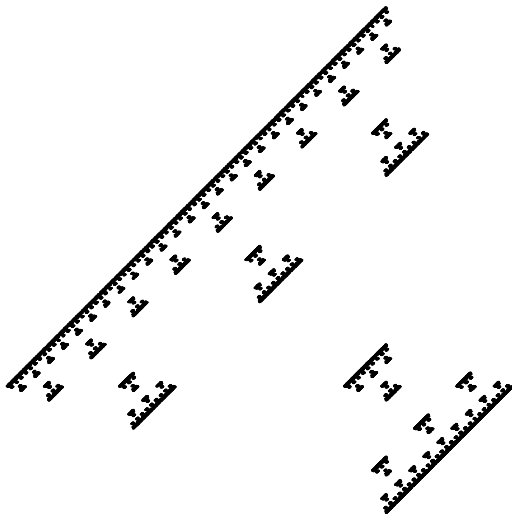
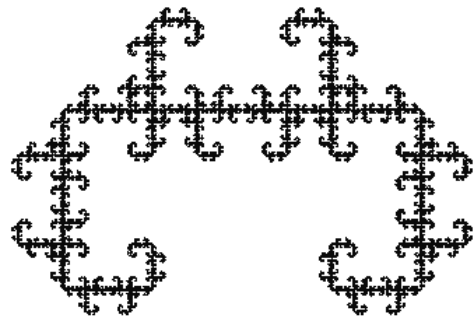


Figure 1: Bifurcatiediagrammen van de functiefamilie $f_\lambda(x) = x^4 + \lambda$.

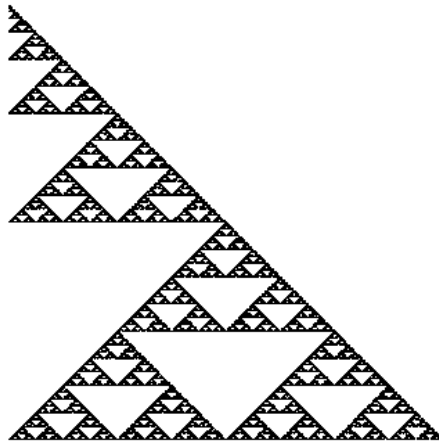
2.
 - a. Bepaal van elk van de vier fractalen in Figuur 2 de fractale dimensie.
 - b. De fractalen in Figuur 2 zijn middels het “Chaos Spel” met een “Iterated Function System” (IFS) gegenereerd, waarbij in sommige gevallen ook rotaties zijn gebruikt. Bepaal de overeenkomstige afbeeldingen van het IFS voor Figuur 2(d). Introduceer hiertoe zelf geschikte coördinaten.
 - c. Wat is de contractiefactor die gebruikt wordt bij het genereren van de zogeheten “box fractal”? En voor welke andere waarde(n) van deze contractiefactor (bij gelijkblijvende vaste punten) verwacht je dat de bijbehorende fractaal het gehele vierkant zal gaan vullen?



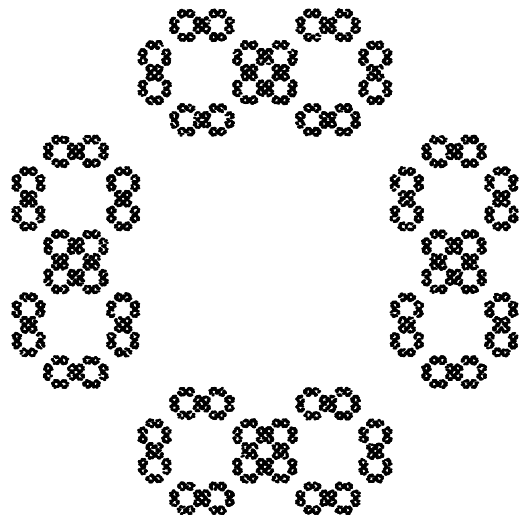
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 2: Wat is de fractale dimensie?

3. Gegeven zijn twee iteratiefuncties $f, g : [0, 5] \rightarrow [0, 5]$ met als functievoorschriften:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \in [0, 3] \\ -4x + 17 & x \in [3, 4] \\ -x + 5 & x \in [4, 5] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 5 & x \in [0, 2] \\ -3x + 9 & x \in [2, 3] \\ x - 3 & x \in [3, 5] \end{cases}$$

- Teken de grafieken van f en g . Geef aan of f en g continu zijn. Bereken de vaste punten (“fixed points”) van f en g .
 - Bereken de baan (“orbit”) van het startpunt $x_0 = 1$, zowel voor de functie f als voor de functie g .
 - Bepaal voor de functie f een punt met echte periode (“prime period”) gelijk aan 2.
 - Toon aan voor de functie g dat alle punten $x \in [0, 2]$ en $x \in [3, 5]$, met uitzondering van $x = 1$ en $x = 4$, de echte periode 4 bezitten.
 - Toon aan dat f een periodiek punt bezit van echte periode 3, maar g niet. Wat houdt dit in voor het gedrag van de iteratieprocessen gebaseerd op f en g ?
4. Gegeven is een tijdinvariant niet-lineair systeem in continue tijd, beschreven door het volgende stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y + 2x^3 + 3y^3, \\ \dot{y} = -10x + 6y + 3x^3 + 5y^3. \end{cases}$$

- Laat zien dat het punt $(0, 0)$ een evenwichtspunt is van het systeem.
- Lineariseer het systeem rond het evenwichtspunt $(0, 0)$. Wat voor type evenwicht is $(0, 0)$ voor het gelineariseerde systeem? Wat betekent dit voor het evenwichtspunt $(0, 0)$ van het originele niet-lineaire systeem?
- Toon aan dat de fasepaden van het gelineariseerde systeem beschreven worden door de krommen $5x^2 - 6xy + 2y^2 = c$, met $c \geq 0$ een willekeurige constante.
- Onderzoek de stabiliteit van het evenwichtspunt $(0, 0)$ voor het originele niet-lineaire systeem m.b.v. een geschikte kwadratische Lyapunovfunctie $V(x, y)$. Geef daarbij aan of de gekozen functie $V(x, y)$ een zwakke dan wel een sterke Lyapunovfunctie is.