

1. Iemand gooit herhaald met een zuivere munt en noteert de reeks van uitkomsten, waarbij hij 1 voor kop schrijft en 0 voor munt. Bereken het verwachte aantal worpen dat hij nodig heeft om zo de reeks 11011 te krijgen.
2. Een bedrijf verkoopt elke week 0,1 of 2 producten. De kansen hierop zijn afhankelijk van het wel of niet verkocht hebben van een product in de voorgaande week. Indien er in de voorgaande week niets verkocht is, zijn de kansen op het verkopen van 0,1 of 2 producten respectievelijk  $1/2$ ,  $1/2$  en 0. Indien er in de voorgaande week minstens één product verkocht is zijn deze kansen respectievelijk, 0,  $1/2$  en  $1/2$ . Het bedrijf kan aan het begin van iedere week zijn voorraad aanvullen. Zijn maximale voorraad is 2. Indien hij aan het einde van een week een product niet verkocht heeft, heeft hij voorraadkosten ter grootte van 10 per niet verkocht product. Een verkocht product levert 50 op. Het bedrijf is op zoek naar een optimale bestelstrategie van het type  $(s, S)$ . Dat wil zeggen, als de voorraad geslonken is tot niveau  $s$  of minder, vul het dan aan tot niveau  $S$ .
  - a. Bepaal de gemiddelde opbrengst per week indien de strategie  $(0,1)$  gehanteerd wordt (dus mocht de vraag 2 zijn, dan kan er slechts 1 worden verkocht).
  - b. Bepaal de gemiddelde opbrengst per week indien de strategie  $(1,2)$  gehanteerd wordt.
  - c. Bepaal de gemiddelde opbrengst per week indien de strategie  $(0,2)$  gehanteerd wordt.
  - d. Wat is de beste  $(s, S)$  strategie?

NB. Definieer voor ieder van deze opgaven een bijpassende Markov keten en bepaal via de invariante kansverdeling de verwachte opbrengsten per week.

3. Voor meer dan 100 lezingen op een conferentie is een voorlopig rooster gemaakt. Dit houdt in dat het moment van de lezing al wel bekend is (er zijn 20 verschillende tijdsloten die elkaar niet in tijd overlappen), maar dat de toewijzing aan een lokaal nog geregeld moet worden. Er zijn in totaal 8 lokalen beschikbaar. Er is al voor gezorgd dat niet meer dan 8 lezingen op één moment zijn gepland, maar er is geen rekening gehouden met de eis dat sommige lezingen, die op verschillende momenten zijn ingeroosterd, in hetzelfde lokaal gehouden moeten worden. Deze clusters van lezingen zijn als invoer gegeven en daarbij geldt dat elke lezing deel uitmaakt van precies één cluster. De vraag is of het rooster nu volledig gemaakt kan worden, rekening houdend met de eis dat lezingen uit één cluster aan hetzelfde lokaal worden toegewezen.

De benodigde data is opgeslagen in een matrix  $A$ . Hierbij geldt dat

$$A_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{als cluster } c \text{ een lezing bevat op tijdstip } t \\ 0 & \text{in het andere geval.} \end{cases}$$

De beslisvariabele  $x_{\ell c}$  is gedefinieerd door

$$x_{\ell c} = \begin{cases} 1 & \text{als cluster } c \text{ wordt toegewezen aan lokaal } \ell \\ 0 & \text{in het andere geval.} \end{cases}$$

- a. Definieer de variabele  $y_{\ell t}$  als het aantal keren dat er in lokaal  $\ell$  een lezing op tijdstip  $t$  is ingepland. Geef een uitdrukking voor  $y_{\ell t}$  in de beslisvariabelen en de data van het probleem.
  - b. Definieer de variabele  $z_{\ell t}$  als het teveel aan lezingen in lokaal  $\ell$  dat op tijdstip  $t$  is ingepland. Geef een uitdrukking voor  $z_{\ell t}$  in de overige variabelen.
  - c. Formuleer het probleem om clusters aan lokalen toe te wijzen als een integer programmeringsprobleem.
4. Een aantal computerprogrammas moet worden toegewezen aan een drietal processoren, zodanig dat de totale rekentijd van de processor die het meeste werk krijgt toebedeeld zo laag mogelijk is.

Een precieze formulering is als volgt. Gegeven is een aantal computerprogrammas (jobs), genummerd  $1, 2, \dots, n$ . Deze jobs moeten gedraaid worden op een computersysteem met drie verschillende processoren, die we aanduiden met  $A$ ,  $B$  en  $C$ . Een job dient in zijn geheel

te worden toegewezen aan één van de drie processoren, dus een job kan bijvoorbeeld niet voor de helft afgehandeld worden door processor  $A$  en voor de helft door processor  $B$ . Voor elke job  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  zijn drie (niet-negatieve) getallen bekend,  $a_i$ ,  $b_i$  en  $c_i$ , zijnde de rekestijden als job  $i$  wordt uitgevoerd op respectievelijk de processoren  $A$ ,  $B$  en  $C$ . Bij een gegeven toewijzing van jobs aan processoren, definiëren we de *belasting* van een processor als de som van de rekestijden van de jobs die aan die processor zijn toegewezen. Het doel is om alle jobs toe te wijzen aan de processoren, zodanig dat *de belasting van de zwaarst belaste processor minimaal is*.

**NB:** In tegenstelling tot de opgave over gedistribueerd rekenen die tijdens het college behandeld is, is hier dus **geen** sprake van communicatiekosten als jobs aan verschillende processoren toegewezen worden.

- a. Introduceer de variabelen die je denkt nodig te hebben om een oplossing van het probleem te beschrijven. Geef ook een uitdrukking voor de doelfunctie (dat is dus de belasting van de zwaarst belaste processor) in de data van het probleem en de zojuist geïntroduceerde variabelen. (Deze doelfunctie hoeft niet noodzakelijkerwijs lineair te zijn.)
- b. Bedenk een algoritme dat, bij een gegeven instantie van bovenstaand probleem als invoer, een ondergrens geeft voor de optimale waarde van de instantie.

**NB:** Je zou (correct) kunnen observeren dat 0 altijd een ondergrens is voor de optimale waarde. Het hierop gebaseerde algoritme (0 is het antwoord ongeacht de invoer) levert echter 0 punten op. Er geldt bij deze vraag: hoe hoger de waarde is die het algoritme genereert, hoe hoger het puntenaantal (mits het algoritme natuurlijk aan de gestelde voorwaarde voldoet).

- c. Beschrijf een geschikte enumeratieboom, die gebruikt kan worden om het probleem met de branch and bound techniek aan te pakken.

5. Een kleine school kent 7 vakken en 3 docenten. Hieronder staat weergegeven welke vakken iedere docent bevoegd is te geven. (De vakken zijn genoteerd met hoofdletters).

leraar 1:  $A, B, C, F$ .

leraar 2:  $C, D, E$ .

leraar 3:  $A, E, F, G$ .

Per vak worden de volgende aantallen uren per week gegeven:

vak	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$
aantal uren	3	2	3	2	3	2	3

- a. Formuleer een integer programmering probleem dat de vakken zo toewijst aan de leraren, zo dat het aantal lessen van de leraar met de meeste uren zo klein mogelijk is, rekening houdend met hun bevoegdheden.

Stel dat dit resulteert in de toewijzing:

leraar 1:  $A, B, F$ .

leraar 2:  $C, D$ .

leraar 3:  $G, E$ .

Stel dat de vakken  $A, B$ , en  $D$  van het zelfde lokaal gebruik maken en dus niet gelijktijdig gegeven kunnen worden. Hetzelfde geldt voor de vakken  $F, C$ , en  $E$ .

- c. Formuleer een integer programmering probleem dat een planning van de lessen voor de drie leraren verzorgt, waarbij de tijdsperiode tussen het startpunt van de eerste les en het einde van de laatste les zo klein mogelijk is.
- d. Wat is een optimale oplossing voor dit laatste probleem?